第七章 動態規劃

7-1 前言

動態規劃(dynamic programming)是一種數學規劃方法，用於擬訂一時間序列上相互關連的決策過程，提供系統最佳決策程序，訂立一組使全程決策效果達最大之最佳方案。動態規劃問題並沒有一個標準的數學模型，此點與其他數學規劃不同。動態規劃爲一般性問題求解原則，而每一問題所用之模型僅能適合個別情況。因此在求解過程中亦須針對不同之問題撰寫個別之電腦程式。

動態規劃之特徵爲在一個問題中可分爲若干階段(stage)，在每一階段均須作一決策(policy decision)。每一階段中有若干系統之狀態(states)可供選擇。每階段決策之結果，決定目前狀態將如何變換成下一相鄰階段之某一狀態(可能根據某一確定性準則或機率分佈來決定)。而解題方法就是針對全程問題，整合各階段之最佳選擇，以形成全局之最佳執行策略或方案(optimal policy)。

動態優化原理(principle of optimality)係在 1957 年由美國數學家 Bellman 所提出，其原則包括下列兩點：

(1)在任何一個階段之最佳化局部之策略，取決於當時之狀態及成本效益之表現，與過去之選擇無關。

(2)在已知目前狀態之情況下，則其剩餘未來階段的最佳策略與以前階段所採用之策略無關。

動態規劃並無完整之數學模型，對所有問題均可以一遞迴方程(recursive equation)來表達。

從數學架構而言，動態規劃模型求解程序乃從最後階段採逆向搜尋(backward procedure)或自起始階段採前向搜尋(forward procedure)兩種方式，以求得全程中每一狀態應採行之最佳策略，一般以逆向搜尋較常用。若採用此遞迴關係以逆向搜尋方式求解時，各階段逐一逆向退行，每次退行時均求得該階段每一狀態的最佳策略，直到求得由第一階段開始的最佳策略時爲止。亦即若已知第(n+1)階段中每一狀態的最佳策略時，可用遞迴關係(recursive relationship)，求得在第 n 階段中每一狀態的最佳策略。由此可逐次累積成全局之最佳策略。

從計算效率上而言，動態規劃法之求解程序遠比枚舉法(enumeration)有效率。但在應用大規模動態規劃時，亦會遭遇計算上之困難，尤其若牽涉之問題尺度太大時，會使狀態空間變得非常大，而計算所需時間將變得很長，即使用超級電腦或高速工作站來解這種問題時，也會變得相當複雜，此類問題在文獻中特別被稱爲“維度災”或“詛咒性之多維度”問題(curse of dimensionality)。

7-2 動態規劃之種類與解法

7-2-1 動態規劃之種類

動態規劃模型本身結構單純，並無特殊之分類，若由規劃問題本身是否涉及不確定因素來分，則可分為：

(1) 確定性動態規劃

所謂確定性即指其下一階段之各狀態最佳決策完全取決於現階段狀態之最佳決策，而階段間之判斷準則不存在機率分佈之特質。在確定性動態規劃中，狀態變數可以表示為一離散狀態變數(discrete state variable)、或一連續狀態變數(continuous state variable)、或是一狀態向量(state vector) 。

(2) 不確定性動態規劃：

由不確定因素描述之方法，可更進一步分為：

- 機率性動態規劃(probabilistic dynamic programming)：即其下各階段間之最佳化策略之選擇過程，存在一機率分佈之特質。
- 模糊動態規劃(fuzzy dynamic programming)：各階段間之最佳策略判斷準則存在模糊關係。
- 灰色模糊動態規劃(grey fuzzy dynamic programming)：各階段之狀態變數可能為灰色且最佳化策略之判斷準則存在模糊關係。

理論上用古典優化技術是可以解多級決策問題，但這要求變量的數目不多，並要求有關的函數連續及連續可微，且最佳解不能位於邊界上，以及問題應當比較簡單，以使最後得到的方程組可以用解析法或數值法求解。

用線性規劃的方法可以解略微更複雜一些的多級決策問題。但使用它時要求變量連續，且要求預先知道全局極大點或極小點所在的區域。但在所有這些情況下，隨機因素的引入都會使問題變得複雜以致無法求解，但動態規劃方法卻可以用來處理離散變量，非凸函數，不連續函數及不可微函數之問題，而且一般說來確定型動態規劃只要略加修改就可以考慮加入隨機因素。動態規劃雖有維度災弱點，此法對解決策領域中很多複雜問題仍是非常適用的。本章以討論確定性動態規劃為主。不確定性動態規劃將在後續章節中討論之。

7-2-2 動態規劃之求解方法

在表達動態規劃之模型時，可分為前向式(forward)及逆向式(backward)兩種，一般大多利用逆向式來求解，動態規劃求解之推理步驟如下：

- 將問題以分階段之方式組合，並定出系統各階段之狀態。
- 建立在任何階段之狀態選定所需要之系統評價標準，使各階段能得以進行決策。

- 在建構整體模型架構時，必需先決定各階段之狀態如何與下一階段之狀態產生關連性。
- 各階段決策方案之決定過程僅與當時之階段所涉及之系統狀態及系統評價標準有關。
- 經由前向式或逆向式之推理，可逐步完成各階獨立決策，並且可找出全局最優方案。

以下說明動態規劃之基本架構及專有名詞。

- 階段(stage)：將所給問題的過程，恰當地劃分為若干個相互聯繫的階段以便于求解。
- 狀態變數(state variable)：描述過程狀態的變量，稱為狀態變量。
- 決策變量(decision variable)：各階段與決策有關之變數，稱為決策變數，也稱為控制變量。
- 過渡函數或轉換方程(transition function or transform equation)就每一個階段而言， 其輸出狀態和決策變量有關，這種轉換關係記成函數之型態即稱為過渡函數。
- 階段效益(stage effect)：每一階段的輸入狀態和決策變數不僅決定了該階段的輸出狀態，他們的取值也決定了該階段對目標函數的貢獻，這也是一個函數關係。

在考慮如何表示一多級決策過程之前，讓我們先考慮一單級決策過程。他是多級過程的一個單元，在圖 7.1 中以一矩形方框表示。任何決策過程都將有某些輸入參數 S(或數據)，某些決策變數(X)及某些輸出參數(T)。T 是作為決策結果的輸出，我們稱輸入參數為輸入狀態變數，輸出參數為狀態變數之輸出狀態，最後還有一收益稱或稱目標函數 R，它是決策有效性的度量。對圖 7.1 表示的作為單級決策過程的任何物理系統，其輸出及輸入是通過一個過渡函數(有時亦可稱為級變數函數)聯繫起來的。此函數可表示為

$$T = t(X,S) \tag{7-1}$$

因為系統的輸入狀態會影響我們的決策，所以效益函數可表示為

$$R = r(X,S) \tag{7-2}$$

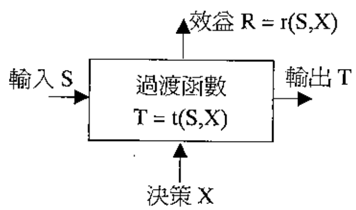


圖 7.1：單級決策問題

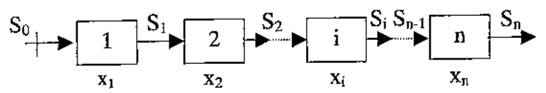
另一方面，多級決策問題的類型亦可依照邊界條件分為下面三類：

- 初值問題。如果初始狀態變量 S_0 為已知的話，此問題就稱為初值問題。
- 終值問題。如果終止狀態變量 S_n 為已知的話，此問題就稱為終值問題。注意只要逆

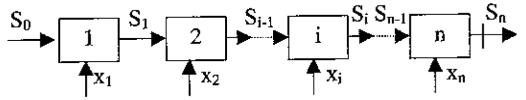
轉 S_i，i=1,2,……，n+1 的方向就可以將一終值問題轉換為一初值問題。

・邊界值問題。如果輸入和輸出變量的值都為已知，此問題就稱為邊界值問題。

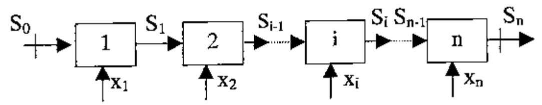
圖 7.2　給出了這三種問題，圖上 ┼→ 符號指該狀態變量是給定的。



(a) 初值問題



(b) 終值問題



(c) 邊界值問題

圖 7.2：多級決策分析問題的類型

若一多級決策過程用圖 7.3 表示，為了方便，我們將各級以 1,2,i,…,n-1，n 之序號下降順序排列，對第 i 級，其輸入狀態向量為 S_{i-1}，而輸出狀態向量為 S_i，因為系統是串聯的，所以 i-1 級的輸出必然是 i 級的輸入，因此過渡函數及效益函數可表示為

$$S_i = t_i(S_{i-1}, X_i) \tag{7-3}$$

$$R_i = r_i(S_{i-1}, X_i) \tag{7-4}$$

這裡 X_i 表示第 i 級的決策向量。方程(7.3)的過渡函數也稱為轉換方程。

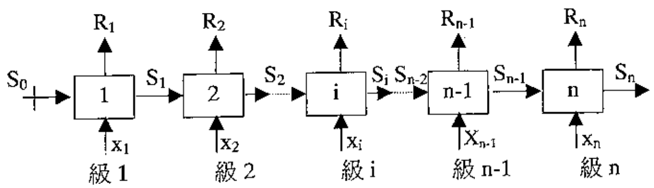


圖 7.3：多級決策問題初值問題

一多級決策問題的目標是尋找 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 使各級收益的某一函數，譬如說(R_1, R_2, R_3)

取極值，並滿足方程(7-3)和(7-4)。此 n 級收益函數 f 的特性決定了一給定的多級問題能否用動態規劃求解。因為此方法利用了分解技術，所以它要求目標函數的可分離性及單調性。

若滿足下列條件

$$R_i(X_i = a, S_{i+1}) \ge R_i(X_i = b, S_{i+1})$$

的所有 a 和 b 值，下述不等式

$$f(X_n, X_{n-1}, \ldots X_{i+1}, X_i = a, X_{i-1}, \ldots X_1, S_{n+1})$$
$$\ge f(X_n, X_{n-1}, \ldots X_{i+1}, X_i = b, X_{i-1}, \ldots X_1, S_{n+1}) \quad i=1,2,\ldots,n \tag{7-5}$$

成立，則稱此目標是具有單調性。

為了具有分離性，目標函數必須要能被表示為單級效益的某種組合。相加型的目標函數及相乘型的目標函數是滿足這一要求，如(7-6)及(7-7)所示：

$$f = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} R_i(X_i, S_{i+1}) \tag{7-6}$$

這裡 R_i 是實數。對相乘型的目標函數：

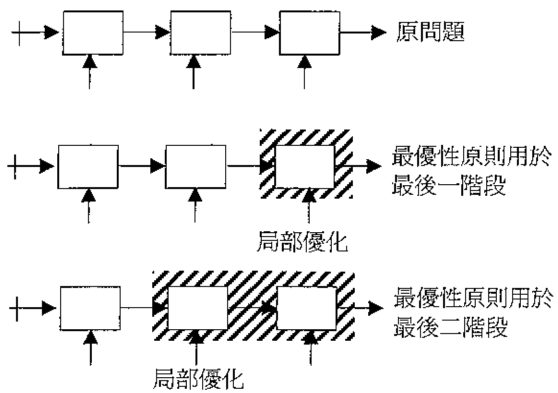
$$f = \prod_{i=1}^{n} R_i = \prod_{i=1}^{n} R_i(X_i, S_{i+1}) \tag{7-7}$$

但注意下面這一目標函數是不可分離的：

$$f = [R_1(X_1, S_2) + R_2(X_2, S_3)][R_3(X_3, S_4) + R_4(X_4, S_5)] \tag{7-8}$$

因此不適用動態規劃。

逆向推理優化過程必須是由後向前進行的，圖 7.4 顯示了逆向推理之最優性原則怎樣逐漸地由後面之單元向前面的單元擴充，以涵蓋各級局部優化的範疇，一直到整個系統都被優化為止。



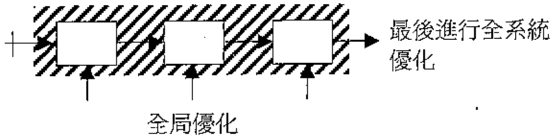


圖 7.4：逆向推理最優性原則的圖示說明

下面解釋遞推關係，假設我們的目標是一 n 級目標函數 f 極小化，而 f 是以各級成本之和的形式定義，則極小化問題之目標函數 f 爲：

$$f = R_n(X_n,S_{n-1}) + R_{n-1}(X_{n-1},S_{n-2}) + \dots + R_1(X_1,S_0) \qquad (7\text{-}9)$$

這裡的狀態和決策變數是由下式聯繫的：

$$S_i = T_i(S_{i-1},X_i),\quad i=1,2,\dots,n \qquad (7\text{-}10)$$

以最後一級 i=n 開始，考慮第一個優化問題。如果此級的輸入 S_{n-1} 爲已知，那麼根據最優性原則我們必須選擇 X_n 以使 R_n 優化。不管其他級怎麼樣，X_n 一定要選得使 $R_n(X_n,S_{n-1})$ 對應輸入 S_{n-1} 是最優值。如果將此最優值表示爲 f_n^*，將有

$$f_n^*(S_{n-1}) = \underset{X_n}{opt}[R_n(X_n,S_{n-1})] \qquad (7\text{-}11)$$

我們稱此爲第一級策略，因爲一旦輸入狀態 S_{n-1} 給定，則 R_n，X_n 的最優值及 S_n 將完全被確定。方程(7-11)是一參數方程，它將最優值 f_n^* 表示爲輸入參數 S_{n-1} 的函數。

接著讓我們將最後兩級組合到一起，討論第二個子優化問題。若 f_{n-1}^* 表示對特定輸入 S_{n-2} 第二個子優化問題的最優目標函數值，則有

$$f_{n-1}^*(S_{n-2}) = \underset{X_n,X_{n-1}}{opt}[R_{n-1}(X_{n-1},S_{n-2}) + R_n(X_n,S_{n-1})] \qquad (7\text{-}12)$$

最優性原則要求選擇 X_n，使對給定 S_{n-1}，R_n 取最優值。因爲一旦 X_{n-1} 及 S_{n-2} 都確定了，就可以出 S_{n-1} 的值，所以方程(7-11)可以寫爲

$$f_{n-1}^*(S_{n-2}) = \underset{X_{n-1}}{opt}[R_{n-1}(X_{n-1},S_{n-2}) + f_n^*(S_{n-1})] \qquad (7\text{-}13)$$

這裏 f_{n-1}^* 代表這二級子問題的最優策略。因此可以了解到此最優性原則已將此問題的維數從二(方程(7-12))降到一(方程(7-13))。利用方程(7-9)將方程(7-13)改寫後，可以對這一點看得更清楚。

$$f_{n-1}^*(S_{n-2}) = \underset{X_{n-1}}{opt}[R_{n-1}(X_{n-1},S_{n-2}) + f_n^*\{t_{n-1}(X_{n-1},S_{n-2})\}] \qquad (7\text{-}14)$$

由方程(7-14)可以看出，對給定的輸入 S_{n-2} 只要適當選擇決策變量 X_{n-1} 就可以求得最優解。因此，方程(7-14)所表達的二維優化問題(這裡 X_n，X_{n-1} 要同時改變以求出最優值 f_{n-1}^*)已簡化爲由方程(7-11)及(7-12)所定義的兩個子優化問題。因爲這兩個子問題的任一個都仍涉及一個決策變量，所以這一新優化問題要簡單的多。

對這一思路可加以再推廣到 n 維空間，此時由下式表達之。

$$f_i^*(S_{i+1}) = \underset{X_i,X_{i+1},\dots,X_n}{opt}[R_i(X_i,S_{i-1}) + R_{i+1}(X_{i+1},S_i) + R_n(X_n,S_{n-1})] \qquad (7\text{-}15)$$

定義的第 i 個子問題可以寫爲

$$f_i^*(S_{i-1}) = \underset{X_i}{opt}[R_i(X_i,S_{i-1}) + f_{i+1}^*(S_i)] \qquad (7\text{-}16)$$

這裡 f_{n-i}^* 表示相應於最後 i 級的目標函數的最優值，S_{i-1} 是第 i 級的輸入。方程(7-14)所表示的原問題要求同時改變 i 個決策變量 $X_1,X_2,\dots,X_i$ 已確定對給定的任意輸入 S_{i-1} 的 $f_i\sum_{k=1}^{n}R_k$ 的最優值。但借助最優性原則這一問題可以分解爲 i 個分離的問題，每一問題仍涉及一個決策變量。方程(7-15)是我們要求的遞推關係式。它對 i=i+1,…,n 都是正確的。

以上之問題係以效益最大化爲考量，若以成本最小化爲考量，原理亦完全相同。現將逆向推理以文字表達方式來綜合說明如下：

1.假若定義 $f_t(i)$ 爲在各階段 t，t+l，……，T 之最小懲罰成本之定義式，已知第 t 階段之狀態爲 i，則 $f_t(i)$=min{(t 階段之成本)+f_{t+1} (在 t+l 階段之新狀態)}，其中最小化策略是在 t 階段之狀態 i 下，經由未來全程最佳決策所搭配而成。

2.故逆向式推理可由決定 $f_T(\cdot)$ 開始，然後是 $f_{T-1}(\cdot)$ 直到最終之 f_1(起始狀態)爲止， 逐步完成 1 中之計算。

3.在完成 2 之工作後，可由前向後挑出全程之最佳方案，即由第 1 階段決策最佳狀態，得到在第 2 階段決策之最佳狀態，以此方法繼續執行下去，直到決定出在第 T 階段之最佳決策狀態，並完成全局最佳方案之確認。

前向式之推理也有相似之程序，僅推理大方向相反而已。

因此動態規劃技術在應用時是先將一多級決策問題表示爲或者分解爲一系列單級決策問題。因此一個 N 個變量的問題是被表示作一系列 N 個單變量問題，並順序求解。在大多數情況下解這 N 個子問題比解原問題要容易些。這 N 個子問題的分解使我們可以通過解 N 個一維優化問題而得到原 N 個變量問題的最優解。但特別應當注意的是解這 N 個一維優化問題所有可能採用之方法經過篩選評比後再決定是否須採用動態規劃技術，譬如，可以考慮採用枚舉法、微分解析法、或用非線性規劃技術。

在求解動態規劃模型時，表達方式一般可採用列表計算方式、樹狀、或網路圖解方式，前者較適合電腦程式之撰寫，後者因具圖相表徵，較易於了解。下面以例題 7-1 說明動態規劃之逆向推理型態。

例題 7-1：

今考慮一項投資問題，已知有資本額 S_0 存在 B 銀行中，二年後才需再領出使用，假設第一年利率爲 7%，第二年利率爲 5%，但若將資金存入 A 銀行則有較高之利息，A 銀行第一年利率爲 10%，第二年利率則爲 7%。A 銀行每年另外要收維持費 20 元，此外，每一次在 A 及 B 銀行間轉帳均須繳交手續費 10 元。但二年後這筆存款必須要轉回 B 銀行，已知 S_0 爲 1,200 元，其投資架構可如下圖 7.5，試以確定性動態規劃決定最佳之存款方案。

以網路圖解示如圖 7.9：

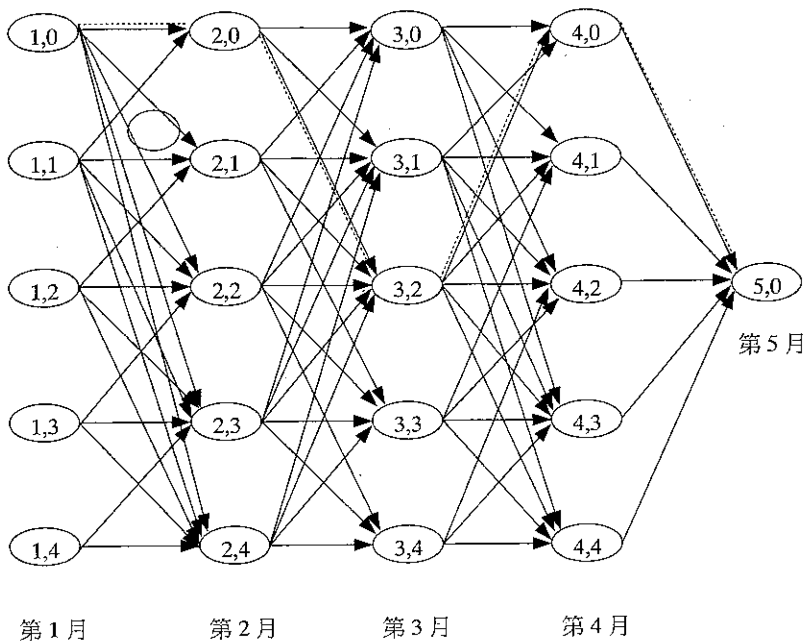


圖 7.9：例題 7-3 中動態規劃網路圖

上圖中 j，i ：j 代表階段，i 代表倉貯量

$x_1(0)=1$，$x_2(0)=5$，$x_3(0)=0$，$x_4(0)=4$

最佳生產計畫對應到路徑為：

(1,0) (2,0) (3,2) (4,0) (5,0)

即 $x_1^*=1$，$x_2^*=5$，$x_3^*=0$，$x_4^*=4$

圖 7.9 中之虛線路徑代表最佳化路徑，對於較複雜之問題，以列表方式求解，將有助於電腦程式之撰寫。

7-3-3 資源分配(resource allocation)

例題 7-4：

某一家環保公司可投資民有民營焚化廠之金額為六仟萬元，有三個投資方案可選擇，假如對第 j 個投資方案之可用金額為 d_j，因投資而得到淨現值以 $r_j(d_j)$表示，而各投資方案之 $r_j(d_j)$值定義如下：

$$r_1(d_1)=7d_1+2(d_1>0)$$
$$r_2(d_2)=3d_2+7(d_2>0)$$
$$r_3(d_3)=4d_3+5(d_3>0)$$
$$r_1(0)=r_2(0)=r_3(0)=0$$

為了使投資所得淨現值總和極大化，請問應如何分配這六仟萬元?

解：

每一項投資所得利潤不與投資量呈正比例，例如 $16=r_1(2)\neq 2r_1(1)$，此違反線性規劃中比例性之特性，利用線性規劃之方法無法得到最佳解，故考慮以動態規劃來解題。假設六千萬元可為六個投資單位，此問題之數學表達式如下：

$$\max \quad f=\{r_1(d_1)+r_2(d_2)+d_3(d_3)\}$$

r3

$$\text{s.t.} \quad d_1+d_2+d_3=6$$

d_j 為非負整數

若將決定第一個投資方案視為第一階段，第二個投資方案視為第二階段，第三個投資方案視為第三階段，對第三階段而言，

$f_3(0)=0$ ，$x_3(0)=0$

$f_3(1)=9$ ，$x_3(1)=1$

$f_3(2)=13$，$x_3(2)=2$

$f_3(3)=17$，$x_3(3)=3$

$f_3(4)=21$，$x_3(4)=4$

$f_3(5)=25$，$x_3(5)=5$

$f_3(6)=29$，$x_3(6)=6$

其中 x_j：第 j 筆投資金額

f_j ：第 j 項投資效益

$\{x\to d,\ d\to x\}$

對第二階段而言：

$$f_2(d_2)\max_{x_2}\{r_2(x_2)+f_3(d_2-x_2)\}，x_2\in\{0,1,2,\ldots,d_2\}$$

其動態規劃計算如下表 7.4：

表 7.4：例題 7-4 中第二階段動態規劃計算表

d_2	x_2	$r_2(x_2)$	$f_3(d_2-x_2)$	投資 2，3 之現值	$f_2(d_1)$ $x_2(d_2)$
0	0	0	0*	0*	$f_2(0)=0$ $x_2(0)=0$
1	0	0	9	9	$f_2(1)=10$
1	1	10	0	10*	$x_2(1)=1$
2	0	0	13	13	$f_2(2)=19$
2	1	10	9	19*	$x_2(2)=1$
2	2	13	0	13	
3	0	0	17	17	$f_2(3)=23$
3	1	10	13	23*	$x_2(3)=1$
3	2	13	9	22	
3	3	16	0	16	
4	0	0	21	21	$f_2(4)=27$
4	1	10	17	27*	$x_2(4)=1$
4	2	13	13	26	
4	3	16	9	25	
4	4	19	0	19	
5	0	0	25	25	$f_2(5)=31$
5	1	10	21	31*	$x_2(5)=1$
5	2	13	17	30	
5	3	16	13	29	
5	4	19	9	28	
5	5	22	0	22	
6	0	0	29	29	$f_2(6)=35$
6	1	10	25	35*	$x_2(6)=1$
6	2	13	21	34	
6	3	16	17	33	
6	4	19	13	32	
6	5	22	9	31	
6	6	25	0	25	

對第一階段而言：

$$f_1(6)=\max_{x_1}\{r_1(x_1)+f_2(6-x_1)\}，x_1\in\{0,1,\ldots,6\}$$

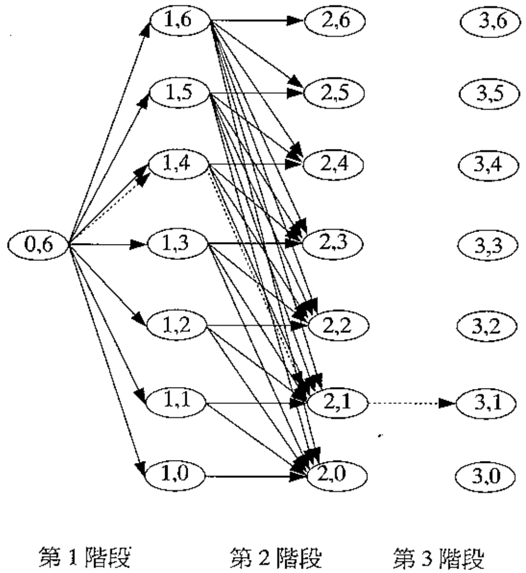
其動態規劃計算如下表 7.5：

表 7.5：例題 7-4 中第一階段動態規劃計算表

d_1	x_1	$r_1(x_1)$	$f_2(6-x_1)$	投資 1~3 之現值	$f_1(6)$ $x_1(6)$
6	0	0	35	35	$f_1(6)=49$
6	1	9	31	40	$x_1(6)=4$
6	2	16	27	43	
6	3	23	23	46	
6	4	30	19	49*	
6	5	37	10	47	
6	6	44	0	44	

故得 $x_1^*=4$，$x_2^*=1$，$x_3^*=1$，$f^*=49$，

以網路圖表示如圖 7.10：



圖說 (j,x_i)：j 表階段數；x_i 表可投資量

圖 7.10：例題 7-4 中動態規劃網路圖

最佳路徑為：

(1,4)→(2,1)→(3,1)

例題 7-5：

水資源分配問題，如圖 7.11：

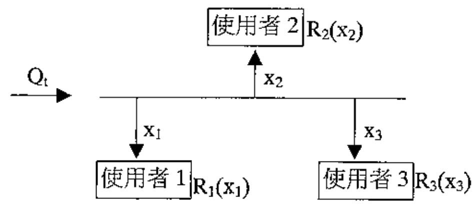


圖 7.11：例題 7-5 中系統示意圖

水供給分配問題考慮到每一個使用者之單一淨利潤函數，假設此函數為二次函數：